Loterie a matematika – SŠ – řešení

Ve videu se mluví o *loterii* a *Sportce*. Základní matematické principy a fungování obou hazardních her nyní prozkoumáme.

1) Provozovatel loterie vydal celkem 1 000 losů, každý v hodnotě 10 Kč. V tabulce jsou uvedeny počty a výše výher pro jednotlivé ceny.

	1. cena	2. cena	3. cena	4. cena	5. cena
počet výher	1	3	10	20	50
výše výhry	1 000 Kč	500 Kč	200 Kč	100 Kč	50 Kč

a) Určete zisk provozovatele loterie, pokud prodá všechny losy.
b) Pro jednotlivé ceny určete pravděpodobnosti výhry při zakoupení jednoho losu.
c) Jaká je střední (očekávaná) hodnota výhry na jeden los?
d) Kolik nejméně musíme koupit losů, abychom měli jistotu, že vyhrajeme aspoň jednu cenu?
e) Kolik nejméně musíme koupit losů, abychom měli pravděpodobnost větší než 0,5, že vyhrajeme aspoň jednu cenu?

a) Za 1 000 losů po 10 Kč dostane provozovatel loterie celkem 10 000 Kč.
Výhercům vyplatí dohromady

$$1 \cdot 1\,000\ \text{Kč} + 3 \cdot 500\ \text{Kč} + 10 \cdot 200\ \text{Kč} + 20 \cdot 100\ \text{Kč} + 50 \cdot 50\ \text{Kč} = 9\,000\ \text{Kč}$$

Pokud provozovatel loterie prodá všechny losy, jeho zisk bude 1 000 Kč.

b) Hráč kupuje los „náhodně“. Každý z 1 000 losů má stejnou šanci (pravděpodobnost), že hráč koupí právě tento los. Proto můžeme k výpočtům použít klasický pravděpodobnostní prostor, v němž je pravděpodobnost každého jevu dána poměrem počtu výsledků příznivých danému jevu a počtu všech možných výsledků. Vzhledem k tomu, že loterie má 1 000 losů, je počet všech možných výsledků roven 1 000. Protože jen na jeden los je vyplacena první cena dostaneme

$$P(1.\,\text{cena}) = \frac{1}{1\,000} = 0{,}001.$$

Analogicky vypočítáme

$$P(2.\,\text{cena}) = 0{,}003 \qquad P(3.\,\text{cena}) = 0{,}01 \qquad P(4.\,\text{cena}) = 0{,}02 \qquad P(5.\,\text{cena}) = 0{,}05.$$

c) Střední hodnotu výhry na jeden los vypočteme ze vztahu

$$1\,000 \cdot 0{,}001 + 500 \cdot 0{,}003 + 200 \cdot 0{,}01 + 100 \cdot 0{,}02 + 50 \cdot 0{,}05 = 9.$$

Střední hodnota výhry na jeden los je 9 Kč. Odtud je zřejmé, že nákupem jednoho losu hráč v průměru „odevzdá“ 1 Kč provozovateli loterie. Ke stejnému závěru můžeme dojít i s využitím výsledku v bodě a), kdy celkový zisk provozovatele loterie vydělíme počtem vydaných losů.

d) Loterie má dohromady 1 000 losů, z nichž je

$$1 + 3 + 10 + 20 + 50 = 84$$

vyhrávajících. Zbývajících 1 000 – 84 = 916 je nevyhrávajících. Chceme-li mít jistotu, že vyhrajeme aspoň jednu cenu, musíme koupit aspoň 917 losů.

e) Pravděpodobnost, že získáme nějakou cenu, bude v tomto případě výhodnější počítat přes doplňkový jev. Tedy od 1 odečteme pravděpodobnost jevu, že nezískáme žádnou cenu.

$$P(\text{výhry na jeden los}) = 1 - \frac{916}{1\,000} = 0{,}084$$

$$P(\text{výhry na 2 losy}) = 1 - \frac{916}{1\,000} \cdot \frac{915}{1\,000} \doteq 0{,}162$$

$$P(\text{výhry na 3 losy}) = 1 - \frac{916}{1\,000} \cdot \frac{915}{1\,000} \cdot \frac{914}{1\,000} \doteq 0{,}234$$

atd.

$$P(\text{výhry na 8 losů}) = 1 - \frac{916}{1\,000} \cdot \frac{915}{1\,000} \cdot \frac{914}{1\,000} \cdot \frac{913}{1\,000} \cdot \frac{912}{1\,000} \cdot \frac{911}{1\,000} \cdot \frac{910}{1\,000} \cdot \frac{909}{1\,000} \doteq 0{,}519$$

Stačí koupit 8 losů, abychom měli nadpoloviční šanci, že vyhrajeme aspoň jednu cenu.

2) V každém tahu *Sportky* je losována šestice čísel z čísel od 1 do 49. Sázejícím, kteří správně uhádli tři a více čísel je vyplácena výhra.
   a) Kolika různými způsoby lze ze 49 čísel vylosovat 6 čísel?
   b) Jaká je pravděpodobnost, že hráč (vsadí-li jednu šestici) správně uhodne všech šest čísel? Kolikrát po sobě by musel při hodu (pravidelnou) mincí padnout rub, aby byl tento jev „srovnatelně“ pravděpodobný s uhádnutím všech šesti čísel Sportky?
   c) Jaká je pravděpodobnost, že hráč (vsadí-li jednu šestici) správně uhodne právě pět, právě čtyři a právě tři čísla?
   d) Někteří sázející zásadně nevolí čísla, která byla vylosována v předchozím tahu, v domnění, že zvyšují svoji šanci na výhru. Je tato úvaha správná?

a) Nejprve si uvědomíme, že

- žádné číslo se ve vylosované šestici nemůže opakovat,
- nezáleží, v jakém pořadí byla čísla vylosována.

Odtud je zřejmé, že hledáme počet kombinací šesté třídy ze 49 prvků bez opakování. Tento počet určíme ze vzorce

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13\,983\,816.$$

b) Vzhledem k tomu, že vylosování každé šestice je stejně možné (pravděpodobné), můžeme opět použít klasický pravděpodobnostní prostor. Pouze jeden výsledek z 13 383 816 je příznivý, a tedy

$$P(\text{uhodnutí 6 čísel}) = \frac{1}{13\,983\,816} \doteq 0{,}000\,000\,072$$

Pravděpodobnost, že v jednom hodu mincí padne rub je $\frac{1}{2}$. Pravděpodobnost, že padnou dva ruby po sobě je $\frac{1}{2^2}$, tři ruby po sobě padnou s pravděpodobností $\frac{1}{2^3}$, atd. Vzhledem k tomu, že

$$2^{24} = 16\ 777\ 216,$$

vidíme, že uhodnutí všech šesti čísel je přibližně stejně pravděpodobné, jako že při hodu pravidelnou mincí padne 24krát po sobě rub.

c) Podobně jako v bodě a) vypočteme

$$P(\text{uhodnutí právě 5 čísel}) = \frac{\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1}}{13\ 983\ 816} \doteq 0{,}000\ 018$$

$$P(\text{uhodnutí právě 4 čísel}) = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}}{13\ 983\ 816} \doteq 0{,}000\ 967$$

$$P(\text{uhodnutí právě 3 čísel}) = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}}{13\ 983\ 816} \doteq 0{,}017\ 650$$

d) Pravděpodobnost, že žádné z čísel předchozího tahu nebude v bezprostředně následujícím tahu vylosováno, vypočteme jako

$$P(\text{žádné z předchozích}) = \frac{\binom{43}{6}}{\binom{49}{6}} \doteq 0{,}436.$$

S pravděpodobností $1 - 0{,}436 = 0{,}564$ bude vylosováno aspoň jedno číslo, které bylo vylosováno i v předchozím tahu. Úvaha tedy není správná.